

DM de mathématiques n°6

Polynômes de Tchebychev

à rendre pour le lundi 2 mars

On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P_0 = 1 \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$

- 1) Calculer P_2, P_3, P_4 .
- 2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
- 3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$P_n \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

- 4) En déduire une expression simple de $P_n(\cos \theta)$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
- 5) Montrer que P_n est l'unique polynôme de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

- 6) Résoudre l'équation $\cos(n\theta) = 0$, d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.
- 7) En déduire toutes les racines de P_n , puis donner une factorisation de P_n .
- 8) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction de puissances de $\cos \theta$.
- 9) Déduire de la question précédente que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2p} X^{n-2p} (X^2 - 1)^p$$

- 10) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

- a) Calculer f_0, f_1 et f_2 .
- b) Exprimer $f_{n+1} + f_{n-1}$ en fonction de f_n .
- c) Pour tout $x \in [-1, 1]$, exprimer $f_n(x)$ comme un polynôme en x .